

# Analiza Matematyczna 2.1A (MAT1422) dla W8, W10, W12

## Analiza Matematyczna 2 (MAT1738) dla W5

## Analiza Matematyczna II (MAT1741) dla W6

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 14. Piętnaste ćwiczenia przeznaczono na kolokwium. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej <http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczeniiane/egzaminy-na-ocene-celujaca> oraz w książce [5].

---

### Ćwiczenia 1

---

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x}; \quad (b) \int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1}; \quad (c) \int_{2\pi}^{\infty} x \cos x dx; \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-x} + 1}}; \quad (e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}; \quad (f) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{2x} dx.$$

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\sqrt{x} + 1)}; \quad (b) \int_4^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x} + 3)^2}; \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{x(x + 1) dx}{x^4 + x + 1}; \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{(2^x + 1) dx}{3^x + 1}; \quad (e) \int_{\pi}^{\infty} \frac{(x + \sin x) dx}{x^3}; \quad (f) \int_4^{\infty} \frac{(3 + \cos x) dx}{\sqrt{x} + 2}.$$

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x} + 1) dx}{x(x + 1)}; \quad (b) \int_5^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^5 - 3}}; \quad (c) \int_2^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx; \quad (d) \int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx; \quad (e) \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 - \sin x}.$$

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą  $y = \frac{1}{x^2 + 9}$  oraz osią  $Ox$ .

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi  $Ox$  obszaru  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ .

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji  $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$  ( $x \geq 1$ ) wokół osi  $Ox$  ma skończoną wartość.

5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x + 1)}; \quad (b) \int_0^e \frac{\ln x dx}{x}; \quad (c) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}; \quad (d) \int_3^5 \frac{2^x dx}{\sqrt{2^x - 8}}; \quad (e) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x + 1)}.$$

6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^4 \frac{\arctg x dx}{x\sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^2 \frac{e^x dx}{x^3}; \quad (c) \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}; \quad (d^*) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^4}}.$$

7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^1 \frac{(x^3 + 1) dx}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}; \quad (b) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x dx}{x^4}; \quad (c) \int_0^1 \frac{(e^x - 1) dx}{\sqrt{x^3}}; \quad (d^*) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; \quad (e^*) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x dx}{x^2 + 4}; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 1}; \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+5|} dx; \quad (d) \int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}; \quad (e) \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

## Ćwiczenia 2

9. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}; \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

10. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 + n}; \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}; \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n} + 1}.$$

11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + e^n}{e^n + 4^n}; \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n3^n + 2^n}.$$

12. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n-1}{3^n-1};$$
$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \ln(1+3^{-n}); \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n^2)}{\sin(\pi/n)}; \quad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!}.$$

13. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016^n}{(2n)!}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{n^4+1}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}; \quad (e^*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

14. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^{2n}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n}{n+1}\right)^n.$$

15. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n); \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+4^n}; \quad (c) \sum_{n=4}^{\infty} \sin \frac{(-1)^n}{n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}.$$

16. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+2}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n; \quad (d) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{e}-1); \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}.$$

## Ćwiczenia 3

17. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{ne^n}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (4x-12)^n; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}; \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}.$$

18. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

$$(a) \frac{5}{1-2x}; \quad (b) \sin \frac{x}{2}; \quad (c) x^2 e^{-x}; \quad (d) \frac{x^3}{16+x^2}; \quad (e) \cosh x; \quad (f) \sin^2 x.$$

19. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

$$(a) f^{(50)}(0), \quad f(x) = x^2 \cos x; \quad (b) f^{(20)}(0), \quad f(x) = x e^{-x};$$
$$(c) f^{(11)}(0), \quad f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}; \quad (d) f^{(10)}(0), \quad f(x) = x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

20. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}; \quad (b) f(x) = x e^{-x^2}; \quad (c) f(x) = \ln(1+x^2); \quad (d) f(x) = \arctg x.$$

21. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego  $x \in (-1, 1)$  prawdziwe są równości:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

22. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{5^n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}.$$

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

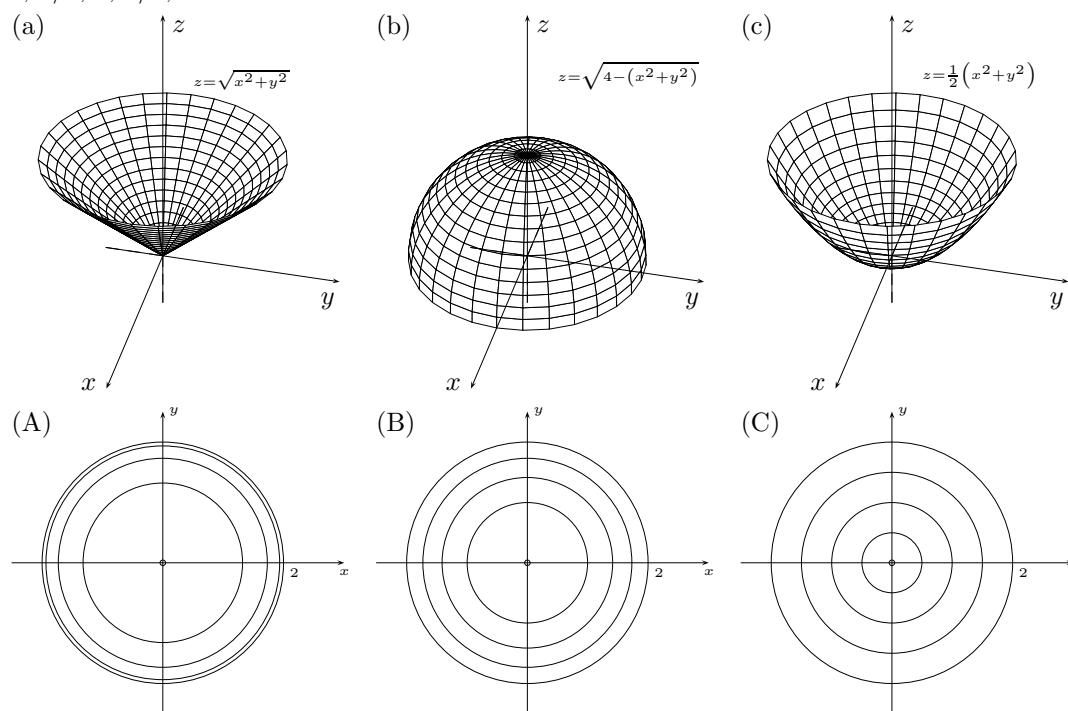
## Ćwiczenia 4

23. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

$$(a) f(x, y) = \ln(y - \sin x); \quad (b) f(x, y) = \sqrt{\frac{y-2}{x+1}}; \quad (c) f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y}}; \quad (d) f(x, y) = \ln \frac{x^2 + y^2 - 9}{16 - x^2 - y^2};$$

$$(e) g(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{2-z}; \quad (f) g(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

24. Wykresy (rys. (a)–(c)) połączyć z odpowiadającymi im poziomiami (rys. (A)–(C)) wykonanymi dla  $h = 2, 3/2, 1, 1/2, 0$ :



25. Naszkicować wykresy funkcji:

$$(a) f(x, y) = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}; \quad (b) f(x, y) = \sqrt{3 + 2x - x^2 - y^2}; \quad (c) f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 6y + 3;$$

$$(d) f(x, y) = \cos x; \quad (e) f(x, y) = 1 - y^2; \quad (f^*) f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}.$$

\* 26. Obliczyć granice:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2}; \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}; \quad (d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \cos \frac{1}{x^4 + y^4}.$$

---

## Ćwiczenia 5

---

27. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu  $f_x, f_y$  funkcji  $f$  we wskazanych punktach:

(a)  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, (0, 1)$ ;      (b)  $f(x, y) = \sqrt{x^6 + y^4}, (0, 0)$ .

28. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji  $f$  i  $g$ :

(a)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{xy^2}$ ;      (b)  $f(x, y) = \arctg \frac{1 - xy}{x + y}$ ;      (c)  $f(x, y) = e^{\cos \frac{x}{y}}$ ;

(d)  $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ ;      (e)  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$ ;      (f)  $g(x, y, z) = x^2 + \frac{xz}{y} + yz^3$ ;

(g)  $g(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ ;      (h)  $g(x, y, z) = \cos(x \sin(y \cos z))$ ;      (i)  $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y^2 + \sqrt{z^2 + 1}}}$ .

29. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji  $f$  i  $g$ :

(a)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ ;      (b)  $f(x, y) = ye^{xy}$ ;      (c)  $f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{x}$ ;

(d)  $f(x, y) = y \ln \frac{x}{y}$ ;      (e)  $g(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}$ ;      (f)  $g(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3 + 1)$ .

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

30. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek  $f_{xx} + f_{yy} = 0$  (równanie Laplace'a):

(a)  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ ;      (b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;      (c)  $f(x, y) = \cos x \cosh y$ .

31. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

(a)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, f(x, y) = \sin xy$ ;      (b)  $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}, f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ ;

(c)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, f(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{z}$ ;      (d)  $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}, f(x, y, z) = e^{xy+z}$ .

32. Sprawdzić, że funkcje:

(a)  $z = \arctg \frac{y}{x}$ ;      (b)  $z = x + \sqrt{\frac{x}{y}}$ ;      (c)  $z = x + \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ ;      (d)  $z = x + \sqrt{xy}$

spełniają równanie

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{gdzie } x, y > 0.$$

---

## Ćwiczenia 6

---

33. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a)  $z = x^2 \sqrt{y + 1}, (1, 3, z_0)$ ;      (b)  $z = e^{x+2y}, (2, -1, z_0)$ ;      (c)  $z = \frac{\arcsin x}{\arcsin y}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$ ;

(d)  $z = (2 + x - 3y)^4$ , punkt wspólny wykresu i osi  $Oz$ ;      (e)  $z = e^{x+y} - e^{4-y}$ , punkt wspólny wykresu i osi  $Ox$ .

34. (a) Na wykresie funkcji  $z = \arctg \frac{x}{y}$  wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny  $x + y - z = 5$ .

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $z = x^2 + y^2$ , która jest prostopadła do prostej  $x = t, y = t, z = 2t, t \in \mathbb{R}$ .

35. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ ;

(b)  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

36. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a)  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2$ ,  $(1, -2)$ ; (b)  $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$ ,  $(e, 1)$ ; (c)  $f(x, y) = (1 + xy)^y$ ,  $(0, 0)$ ;

(d)  $g(x, y, z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$ ,  $(0, 1, 0)$ ; (e)  $g(x, y, z) = \frac{x}{y + \sin z}$ ,  $(0, 1, \pi)$ ; (f)  $g(x, y, z) = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}}$ ,  $(1, 1, 1)$ .

37. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (-3, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (12/13, 5/13)$ ;

(b)  $f(x, y) = x - \frac{y}{x^2} + y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (3/5, -4/5)$ ;

(c)  $g(x, y, z) = e^{x^2 y^{-z}}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (2/3, -2/3, 1/3)$ .

38. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = y - x^2 + 2 \ln(xy)$  w punkcie  $(-1/2, -1)$  w kierunku wektora  $\mathbf{v}$  tworzącego kąt  $\alpha$  z dodatnią częścią osi  $Ox$ . Dla jakiego kąta  $\alpha$  pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wektory  $\mathbf{v}$ , w kierunku których funkcja  $f(x, y) = \sqrt{e^x}(x + y^2)$  w punkcie  $(0, 2)$  ma pochodną kierunkową równą 0.

## Ćwiczenia 7

39. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$ ; (b)  $f(x, y) = xe^{-y} + \frac{1}{x} + e^y$ ; (c)  $f(x, y) = xy^2(12 - x - y)$  ( $x, y > 0$ );

(d)  $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ ; (e)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ; (f)  $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$  ( $x, y > 0$ );

(g)  $f(x, y) = xy + \ln y + x^2$ ; (h)  $f(x, y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$ ; (i)  $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$ .

40. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $3x + 2y = 6$ ; (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10$ ,  $x - y^2 + 1 = 0$ ;

(c)  $f(x, y) = x^2 y + \ln x$ ,  $8x + 3y = 0$ ; (d)  $f(x, y) = 2x + 3y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

## Ćwiczenia 8

41. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a)  $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$ ;

(b)  $f(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$ ; (c)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ ;

(d)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $D$  – trójkąt o wierzchołkach  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$ ;

(e)  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ ;

(f\*)  $f(x, y) = (x + y)e^{-x-2y}$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ .

42. W trójkącie o wierzchołkach  $A = (-1, 5)$ ,  $B = (1, 4)$ ,  $C = (2, -3)$  znaleźć punkt  $M = (x_0, y_0)$ , dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

43. Jakie powinny być długość  $a$ , szerokość  $b$  i wysokość  $h$  prostopadłościenniej otwartej wanny o pojemności  $V$ , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

44. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

45. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość  $V = 216 \text{ m}^3$ . Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie  $30 \text{ zł/m}^2$ , do budowy podłogi w cenie  $40 \text{ zł/m}^2$ , a sufitu w cenie  $20 \text{ zł/m}^2$ . Znaleźć długość  $a$ , szerokość  $b$  i wysokość  $c$  magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

46. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po  $500 \text{ zł}$  i  $2000 \text{ zł}$  za sztukę. Koszt wyprodukowania  $x$  sztuk drzwi wewnętrznych i  $y$  zewnętrznych wynosi

$$K(x, y) = x^2 - xy + y^2 \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

47. Na paraboli  $y = x^2/2$  wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu  $P = (4, 1)$  jest najmniejsza.

## Ćwiczenia 9

48. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \iint_R (x + xy - x^2 - 2y) \, dx dy, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]; & \text{(b)} \quad & \iint_R \frac{x \, dx dy}{y^2}, \quad R = [1, 2] \times [2, 4]; \\ \text{(c)} \quad & \iint_R \frac{dx dy}{(x + y + 1)^3}, \quad R = [0, 2] \times [0, 1]; & \text{(d)} \quad & \iint_R (x \sin(xy)) \, dx dy, \quad R = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]; \\ \text{(e)} \quad & \iint_R e^{2x-y} \, dx dy, \quad R = [0, 1] \times [-1, 0]; & \text{(f)} \quad & \iint_R \frac{(x + y) \, dx dy}{e^x}, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

49. Całkę podwójną  $\iint_D f(x, y) \, dx dy$  zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar  $D$  ograniczony jest krzywymi:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & y = x^2, \quad y = x + 2; & \text{(b)} \quad & x^2 + y^2 = 4, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad (x, y \geq 0); \\ \text{(c)} \quad & x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0; & \text{(d)} \quad & x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 3 \quad (x < 0). \end{aligned}$$

50. Obliczyć całki iterowane:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2} \, dy; & \text{(b)} \quad & \int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2 \sqrt{y-x} \, dy; & \text{(c)} \quad & \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 + y^3) \, dy; & \text{(d)} \quad & \int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2 + 16} \, dx. \end{aligned}$$

Narysować obszary całkowania.

51. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{|x|} f(x, y) \, dy; & \text{(b)} \quad & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) \, dy; & \text{(c)} \quad & \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) \, dy; \\ \text{(d)} \quad & \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) \, dx; & \text{(e}^*) \quad & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) \, dy; & \text{(f)} \quad & \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) \, dy. \end{aligned}$$

52. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \iint_D xy^2 \, dx dy, \quad D: y = x, y = 2 - x^2; & \text{(b)} \quad & \iint_D x^2 y \, dx dy, \quad D: y = -2, y = \frac{1}{x}, y = -\sqrt{-x}; \\ \text{(c)} \quad & \iint_D e^{\frac{x}{y}} \, dx dy, \quad D: y = \sqrt{x}, x = 0, y = 1/2, y = 1; & \text{(d)} \quad & \iint_D (xy + 4x^2) \, dx dy, \quad D: y = x + 3, y = x^2 + 3x + 3; \\ \text{(e)} \quad & \iint_D x^2 e^{xy} \, dx dy, \quad D: y = x, y = 1, x = 0; & \text{(f)} \quad & \iint_D \frac{x \, dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D: x = 1, x = 2, y = x, y = x\sqrt{3}. \end{aligned}$$

---

## Ćwiczenia 10

---

53. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

- (a)  $\iint_D xy \, dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 1, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$ ;      (b)  $\iint_D xy^2 \, dx dy$ ,  $D: x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ;  
(c)  $\iint_D y^2 e^{x^2+y^2} \, dx dy$ ,  $D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$ ;      (d)  $\iint_D x^2 \, dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 2y$ ;  
(e)  $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$ ,  $D: y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x$ ;      (f)  $\iint_D y \, dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 2x (y \leq 0)$ ;  
(g)  $\iint_D \sin(x^2 + y^2) \, dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq \pi^2$ ;      (h)  $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx dy$ ,  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ .

Obszar  $D$  naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

54. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

- (a)  $y^2 = 4x, x + y = 3, y = 0 (y \geq 0)$ ;      (b)  $x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - 4y = 0$ ;  
(c)  $x + y = 4, x + y = 8, x - 3y = 0, x - 3y = 5$ ;      (d)  $x^2 + y^2 = 2y, y = \sqrt{3}|x|$ .

55. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

- (a)  $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}, z = x^2 + y^2 - 13$ ;      (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1 (z \geq 1)$ ;  
(c)  $x^2 + y^2 - 2y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0$ ;      (d)  $z = 5 - x^2 - y^2, z = 1, z = 4$ ;  
(e\*)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, z = xy, z = 0$ ;      (f\*)  $2z = x^2 + y^2, y + z = 4$ .

56. Obliczyć pola płatów:

- (a)  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$ ;      (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 - Rx \leq 0, z \geq 0$ ;      (c)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2$ ;  
(d) część sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  leżąca wewnątrz paraboloidy  $z = (x^2 + y^2)/2$ .

---

## Ćwiczenia 11

---

57. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

- (a)  $\iiint_U \frac{x \, dx dy dz}{yz}$ ,  $U = [1, 2] \times [1, e] \times [1, e]$ ;  
(b)  $\iiint_U (x + y + z) \, dx dy dz$ ,  $U = [1, 2] \times [2, 3] \times [3, 4]$ ;  
(c)  $\iiint_U \sin x \sin(x + y) \sin(x + y + z) \, dx dy dz$ ,  $U = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$ ;  
(d)  $\iiint_U (x + y)e^{x+z} \, dx dy dz$ ,  $U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

58. Całkę potrójną z funkcji  $g(x, y, z)$  po obszarze  $U$  zamienić na całki iterowane, jeżeli  $U$  jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

- (a)  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 6$ ;      (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 4, (z \geq 4)$ ;      (c)  $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$ .

\* 59. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania:

- (a)  $\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z) \, dz$ ;      (b)  $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) \, dz$ ;

$$(c) \int_0^3 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z) dy; \quad (d) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

60. Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

(a)  $g(x, y, z) = e^{x+y+z}$ ,  $U : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x$ ;

(b)  $g(x, y, z) = \frac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$ ,  $U : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1-x-y$ ;

(c)  $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ ,  $U : x^2 + y^2 \leq 4, 1-x \leq z \leq 2-x$ ;

(d)  $g(x, y, z) = x^2 y^2$ ,  $U : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ .

## Ćwiczenia 12

61. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a)  $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$ ,  $U : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$ ;

(b)  $\iiint_U xyz dx dy dz$ ,  $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

(c)  $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ;

(d)  $\iiint_U (x + y + z) dx dy dz$ ,  $U : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x - y$ .

62. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a)  $\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $U : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;

(b)  $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

(c)  $\iiint_U z^2 dx dy dz$ ,  $U : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$  ( $R > 0$ ); (d)  $\iiint_U x^2 dx dy dz$ ;  $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x$ .

## Ćwiczenia 13

63. Obliczyć objętości obszarów  $U$  ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a)  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x + y + z = 1$ ,  $x + y + z = 5$ ; (b)  $z = 4 - x^2$ ,  $z = y^2 - 5$ ;

(c)  $z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ; (d)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ,  $y = 1$  ( $y \geq 1$ ).

64. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 9\}$ ; (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin^2 x\}$ ;

(c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq e^x\}$ ; (d)  $D$  — trójkąt równoramienny o podstawie  $a$  i wysokości  $h$ ;

(e)  $D$  — trójkąt równoboczny o boku  $2a$ , do którego dołączono półkole o promieniu  $a$ ;

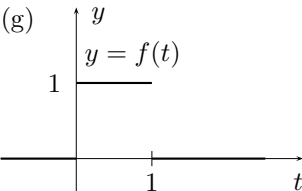
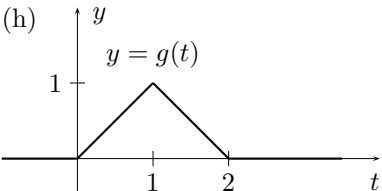
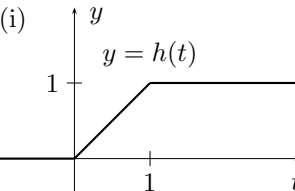
(f)  $D$  — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.



- 65.** Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie  $M$ , względem wskazanych osi lub punktów:
- (a) trójkąt równoboczny o boku  $a$ , podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości  $a$  i wysokości  $h$ , oś symetrii;  
(c) kwadrat o boku  $a$ , przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu  $R$ , oś symetrii;  
(e) koło o średnicy  $D$ , środek; (f) elipsa o półosiach  $a, b$ , oś symetrii.
- 66.** Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:
- (a) półkula o promieniu  $R$ ; (b) stożek o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $H$ ; (c)  $U : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ .
- 67.** Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie  $M$ , względem wskazanych osi:
- (a) walec o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $H$ , oś walca;  
(b) stożek o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $H$ , oś stożka;  
(c) kula o promieniu  $R$ , oś symetrii;  
(d) odcinek paraboloidy o średnicy  $D$  i wysokości  $H$ , oś obrotu.

## Ćwiczenia 14

**68.** Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

- (a)  $2t - 1$ ; (b)  $\sin 2t$ ; (c)  $t^2$ ;  
(d)  $te^{-t}$ ; (e)  $e^{2t} \cos 2t$ ; (f)  $\sinh t$ ;  
(g) ; (h) ; (i) 

**69.** Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

- (a)  $\frac{1}{s+2}$ ; (b)  $\frac{s}{s^2+4s+5}$ ; (c)  $\frac{1}{s^2-4s+3}$ ; (d)  $\frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$ ;  
(e)  $\frac{s^2+1}{s^2(s^2-1)^2}$ ; (f)  $\frac{s+9}{s^2+6s+13}$ ; (g)  $\frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$ ; (h)  $\frac{3s^2}{(s^3-1)^2}$ ; (i)  $\frac{e^{-s}}{s+1}$ .

**70.** Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

- (a)  $y' - y = 1, y(0) = 1$ ; (b)  $y' - 2y = \sin t, y(0) = 0$ ;  
(c)  $y'' + y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$ ; (d)  $y'' + 3y' = e^{-3t}, y(0) = 0, y'(0) = -1$ ;  
(e)  $y'' - 2y' + 2y = \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 1$ ; (f)  $y'' - 2y' + y = 1 + t, y(0) = 0, y'(0) = 0$ ;  
(g)  $y'' + 4y' + 4y = t^2, y(0) = 0, y'(0) = 0$ ; (h)  $y'' + 4y' + 13y = te^{-t}, y(0) = 0, y'(0) = 2$ .

\* **71.** Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty funkcji:

- (a)  $\sin^4 t$ ; (b)  $\cos 4t \cos 2t$ ; (c)  $t^2 \cos t$ ; (d)  $t \sinh 3t$ ;  
(e)  $te^t \cos t$ ; (f)  $e^{3t} \sin^2 t$ ; (g)  $\mathbf{1}(t-2) \sin(t-2)$ ; (h)  $\mathbf{1}(t-1)e^{t-1}$ .

## Ćwiczenia 15 – kolokwium

### Źródła zadań

- [1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

- [2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.
- [3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.
- [4] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.
- [5] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2019.